Teoria ergodyczna
WPPT IIIr. semestr zimowy 2008/9
Wykład III: Twierdzenie Ergodyczne

22/10/08

Definicja. Dany jest układ dynamiczny $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$. Zbiór mierzalny A nazywamy *niezmienniczym* jeśli $\mu(T^{-1}(A) \setminus A) = 0$. (Wtedy z zachowania miary również $\mu(A \setminus T^{-1}(A)) = 0$, czyli $A = T^{-1}(A)$ z dokładnością do miary.)
Funkcję (rzeczywistą mierzalną) f na X nazywamy niezmienniczą (podniezmienniczą) jeśli $f \circ T = f$ ($f \circ T \leq f$) μ-prawie wszędzie.

Definicja. Układ dynamiczny $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$, nazywamy *ergodycznym* jeśli każdy zbiór niezmienniczy ma albo miarę zero, albo jego dopełnienie ma miarę zero.

Fakt. *Układ jest ergodyczny wtedy i tylko wtedy gdy każda funkcja (pod)niezmiennicza jest stała prawie wszędzie.*

Dowód. ($\Longleftarrow$) Funkcja charakterystyczna zbioru niezmienniczego A jest niezmiennicza, więc musi być stała, czyli albo 0 prawie wszędzie albo 1 prawie wszędzie. Czyli zbiór A ma miarę zero albo jego dopełnienie ma miarę zero.
($\Longrightarrow$) Niech f będzie podniezmiennicza. Dla dowolnego rzeczywistego r zbiór $A_r = \{x : f(x) \geq r\}$ jest niezmienniczy, bo gdy $x \in T^{-1}(A_r)$ (minus zbiór miary zero gdzie nie zachodzi podniezmienniczość funkcji), to $f(x) \geq f(Tx) \geq r$, czyli $x \in A_r$. Zatem dla każdego r zbiór A_r lub jego dopełnienie ma miarę 0. Funkcja $r \mapsto \mu(A_r)$ jest nierosnąca. Zatem musi mieć w pewnym (jedynym) r_0 skok z wartości $\mu(X)$ (to może być nieskończoność) do zera. Łatwo widać, że $f \equiv r_0$ prawie wszędzie. $\square$

Twierdzenie ergodyczne Birkhoffa. *Niech $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ będzie układem ergodycznym z miarą skończoną (dla uproszczenia - probabilistyczną). Niech f będzie mierzalna nieujemna i ograniczona. Niech $A_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$ (to się nazywa średnia Cesàro). Wtedy, μ-prawie wszędzie zachodzi zbieżność*

$$\lim_n A_n(x) = \int f \, d\mu.$$

Dowód. Niech M oznacza ograniczenie na f. Niech F oznacza $\int f \, d\mu$. Ponieważ $|A_n(x) - A_n(Tx)| \leq \frac{2M}{n}$, zatem funkcje $\liminf_n A_n$ i $\limsup_n A_n$ są niezmiennicze, a więc z ergodyczności – stałe prawie wszędzie. Nazwijmy te stałe c i C, odpowiednio. Pokażemy najpierw, że $c = F$.
Oczywiście $\int A_n \, d\mu = F$. Z Lematu Fatou,

$$\int \liminf A_n \, d\mu \leq \liminf \int A_n \, d\mu = F.$$

Zatem $c \leq F$. Załóżmy, że jest ostra nierówność i oznaczmy różnicę przez d. W prawie każdym punkcie x intnieje $n > 1$ takie, że $A_n(x) < c + \frac{d}{4}$. Niech n_x oznacza najmniejsze takie n dla x. Oznaczmy $B_n = \{x : n_x = n\}$. Wtedy X jest (z dokładnością do miary) sumą rozłączną zbiorów B_n. Ze skończoności miary

wynika, że istnieje n_0 takie, że miara sumy B_n po $n > n_0$ jest mniejsza od $\frac{d}{4M}$. Oznaczmy tę sumę przez B_0 (nie ma kolizji oznaczeń, bo pozostałe zbiory B_n mają indeks $n > 1$).
Niech N będzie tak duże, że $\frac{n_0}{N} < \frac{\epsilon}{4M}$. Napis $[0, N-1]$ będzie skrótem od $\{0, 1, \ldots, N-1\}$. Rozważmy przestrzeń $X \times [0, N-1]$ z miarą produktową $\mu \times \lambda$, gdzie λ jest unormowaną miarą liczącą, to znaczy $\lambda(V) = \frac{\#V}{N}$.

Taraz będzie trochę trudniej. Dla każdego x zbiór $[0, N-1]$ dzielimy na specjalne odcinki, w następujący sposób: Jeśli $x \in B_{n_1}$ ($n_1 > 1$), to pierwszy odcinek I_1 jest $[k_0, k_1 - 1] = [0, n_1 - 1]$. Jeśli $x \in B_0$, to $I_1 = [0]$ (czyli $k_1 = k_0 + 1$). Dalej, jeśli $T^{k_1}x \in B_{n_2}$ ($n_2 > 1$), to drugi odcinek jest $I_2 = [k_1, k_2 - 1] = [k_1, k_1 + n_2 - 1]$, a jeśli $T^{k_1}x \in B_0$, to $I_2 = [k_1]$ (czyli $k_2 = k_1 + 1$). I tak dalej, dopóki prawy koniec odcinka siedzi w $[0, N-1]$. Gdy prawy koniec odcinka wychodzi poza ten zbiór, to ostatni przedział definiujemy do $N - 1$. Uzyskujemy podział na skończenie wiele przedziałów $I_i = [k_i, k_{i+1} - 1]$ o długościach $1 \leq n_i \leq n_0$ (i zmienia się od 0 do numeru ostatniego przedziału).
Teraz obliczmy średnią $A_N(x)$ jako średnią ważoną po odcinkach I_i :

$$A_N(x) = \tfrac{1}{N} \sum_i n_i A_{n_i}(T^{k_i}x). \tag{*}$$

Każda średnia $A_{n_i}(T^{k_i}x)$ jest mniejsza niż $c + \frac{d}{4}$, chyba że $n_i = 1$ (wtedy $T^{k_i}x \in B_0$ i ta średnia może być dowolna, jednak zawsze ograniczona przez M). I jeszcze nie kontrolujemy średniej po ostatnim odcinku (bo on był sztucznie skrócony), ale ona też nie przekracza M.
Jak już mówiliśmy, ostatni odcinek ma długość nie większą niż n_0, natomiast ilość odcinków długości 1 nie przekracza miary liczącej zbioru

$$E_x = \{n \in [0, N-1] : T^n x \in B_0\}.$$

Zatem dzieląc sumę we wzorze (*) na dwie części (jedna po „dobrych" odcinkach $I_{i'}$, druga - po odcinkach długości 1 i po ostatnim odcinku, indeksowanych przez i'') otrzymujemy:

$$A_N(x) \leq \tfrac{1}{N} \sum_{i'} n_{i'}(c + \tfrac{d}{4}) + \tfrac{1}{N} \sum_{i''} n_{i''} M \leq (c + \tfrac{d}{4}) + (\lambda(E_x) + \tfrac{n_0}{N})M.$$

Teraz scałkujmy to po μ (założyliśmy, że miara jest probabilistyczna, więc całka ze stałej jest równa tej stałej):

$$\int A_N \, d\mu \leq (c + \tfrac{d}{4}) + M(\mu \times \lambda)(E) + M\tfrac{n_0}{N}, \tag{**}$$

gdzie E to zbiór $\{(x, n) : T^n x \in B_0\}$ (tak, że E_x są faktycznie cięciami tego zbioru) i miara produktowa wyszła nam tu z Twierdzenia Fubiniego dla zbiorów. Ostatni człon we wzorze (**) jest nie większy niż $\frac{d}{4}$, tak dobraliśmy N. Pozostało obliczyć miarę produktową zbioru E zamieniając całki iterowane. Wtedy wychodzi

$$(\mu \times \lambda)(E) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(T^{-n}(B_0)).$$

Z niezmienniczości miary μ, ostatnie wyrażenie nie zależy od n i równa się $\mu(B_0)$, mniej niż $\frac{d}{4M}$. Zatem również $(\mu \times \lambda)(E) < \frac{d}{4M}$. Jak się to wstawi do nierówności (**), to przyjmie ona postać

$$\int A_N \, d\mu \leq (c + \tfrac{d}{4}) + \tfrac{d}{4} + \tfrac{d}{4} = c + \tfrac{3}{4}d < F.$$

A to jest sprzeczość, bo całka z A_N jest równa F.

Udowodniliśmy, że $c = F$. Aby udowodnić, że $C = F$ weżmy funkjcę $M - f$. Wtedy c dla tej funkcji równa się $M - C$, gdzie C jest dla f. Czyli z poprzedniej części wiemy już, że $M - C$ jest równe całce z $M - f$, ale to jest $M - F$. To daje, że $C = F$.

Ostatecznie pokazaliśmy, że prawie wszędzie granica dolna c średnich Cesàro jest równa granicy górnej C (i przy okazji równa całce F), zatem granica istnieje prawie wszędzie i równa się $\int f \, d\mu$. $\square$

Tomasz Downarowicz